

Ciągi

numeracja
zadań w
teście

ZAKRES PODSTAWOWY

1

Odpowiedź

B

Wskazówka

Aby obliczyć piąty wyraz wystarczy wyznaczyć wartość q^4 . Skorzystaj ze wzoru na n -ty wyraz ciągu geometrycznego.

2

Odpowiedź

B

Wskazówka

Przeanalizuj, dla jakich liczb podany we wzorze iloczyn jest liczbą ujemną albo rozwiąż nierówność $a_n < 0$ i wybierz z tego zbioru rozwiązania będące liczbami naturalnymi dodatnimi.

3

Odpowiedź

A

Wskazówka

Wyznacz różnicę r ciągu arytmetycznego. Skorzystaj ze wzoru na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego.

4

Odpowiedź

D

Wskazówka

Skorzystaj z zależności między trzema sąsiednimi wyrazami ciągu geometrycznego.

5

Odpowiedź

C

Wskazówka

Skorzystaj z zależności między trzema sąsiednimi wyrazami ciągu geometrycznego.

6

Odpowiedź

B

Wskazówka

Wyznacz różnicę r ciągu arytmetycznego. Skorzystaj ze wzoru na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego.

7

Odpowiedź

C

WskazówkaSuma miar kątów wewnętrznych czworokąta wynosi 360° .

8

Odpowiedź

B

WskazówkaOblicz piąty wyraz ciągu a_n .

Zadanie 32. (0–4)

Modelowanie matematyczne	Zastosowanie własności ciągu arytmetycznego i geometrycznego (III.5.c)
--------------------------	--

I sposób rozwiązania

Ciąg $(9, x, 19)$ jest arytmetyczny, więc wyraz środkowy jest średnią arytmetyczną wyrazów sąsiednich: $x = \frac{9+19}{2} = 14$.

$$x = \frac{9+19}{2} = 14.$$

Wiemy, że ciąg $(14, 42, y, z)$ jest geometryczny, zatem jego iloraz jest równy $q = \frac{42}{14} = 3$.

Wobec tego $y = 3 \cdot 42 = 126$ i $z = 126 \cdot 3 = 378$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania 1 pkt

- wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego i zapisanie, np. $x = \frac{9+19}{2}$ lub

$$2x = 9 + 19 \text{ lub } x = 14$$

albo

- wykorzystanie własności ciągu geometrycznego i zapisanie, np. $42^2 = xy$ lub $y^2 = 42z$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Obliczenie ilorazu ciągu geometrycznego $q = 3$.

Rozwiązanie pełne 4 pkt

Obliczenie $x = 14$, $y = 126$, $z = 378$.

II sposób rozwiązania

Ciąg $(9, x, 19)$ jest arytmetyczny, zatem $2x = 9 + 19$, $x = 14$.

Ciąg $(14, 42, y, z)$ jest geometryczny, zatem $42^2 = 14 \cdot y$ i $y^2 = 42 \cdot z$,

$$y = \frac{1764}{14} = 126 \text{ i } 126^2 = 42 \cdot z, \text{ stąd } z = 378.$$

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania 1 pkt

- wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego i zapisanie, np. $x = \frac{9+19}{2}$ lub

$$2x = 9 + 19, \text{ lub } x = 14$$

albo

- wykorzystanie własności ciągu geometrycznego i zapisanie, np. $42^2 = xy$ lub $y^2 = 42z$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Obliczenie $x = 14$ i zapisanie równania $42^2 = 14y$ lub $1764 = 14y$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Obliczenie $y = 126$ i zapisanie równania $y^2 = 42z$ lub $126^2 = 42z$.

Rozwiązanie pełne 4 pkt

Obliczenie $x = 14$, $y = 126$, $z = 378$.

Uwaga

Jeśli zdający pomyli własności ciągów, to za całe zadanie otrzymuje **0 punktów**.

10 **Odpowiedź**

A

Wskazówka

Oblicz ósmy wyraz ciągu a_n .

11 **Odpowiedź**

B

Wskazówka

Skorzystaj z zależności między sąsiednimi wyrazami ciągu geometrycznego.

12 **Odpowiedź**

D

Wskazówka

Wyznacz iloraz q ciągu geometrycznego. Skorzystaj z ogólnego wzoru na n -ty wyraz ciągu geometrycznego.

13 **Odpowiedź**

C

Wskazówka

Skorzystaj z ogólnego wzoru na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego.

14 **Odpowiedź**

C

Wskazówka

Skorzystaj z ogólnego wzoru na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego.

15 **Odpowiedź**

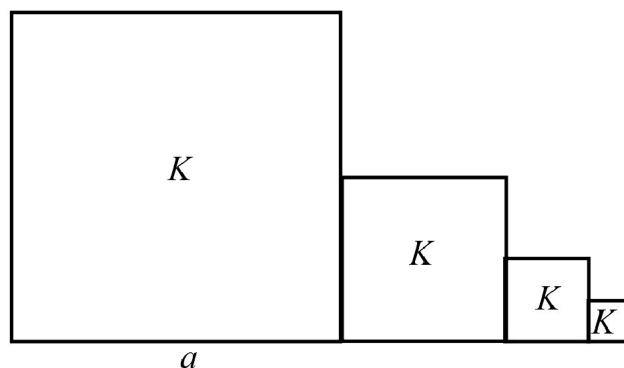
B

Wskazówka

Skorzystaj z ogólnego wzoru na n -ty wyraz ciągu geometrycznego.

IV. Użycie i tworzenie strategii.	5.4. Zdający dobiera strategię do konkretnej sytuacji i wykorzystuje wiadomości o ciągu geometrycznym.
-----------------------------------	--

Kwadrat K_1 ma bok długości a . Obok niego rysujemy kolejno kwadraty $K_2, K_3, K_4, \dots$ takie, że kolejny kwadrat ma bok o połowę mniejszy od boku poprzedniego kwadratu, jak na rysunku.



Wyznacz pole kwadratu K_{12} .

Rozwiązanie (I sposób)

Zauważamy, że pola kwadratów tworzą ciąg geometryczny (k_n) dla $n \geq 1$ o pierwszym wyrazie $k_1 = a^2$ oraz ilorazie $q = \frac{1}{4}$. Ze wzoru na n -ty wyraz ciągu geometrycznego otrzymujemy $k_{12} = k_1 \left(\frac{1}{4}\right)^{11}$, stąd pole kwadratu K_{12} jest równe $\frac{a^2}{4^{11}}$.

Rozwiązanie (II sposób)

Zauważamy, że pola kwadratów tworzą ciąg geometryczny (k_n) dla $n \geq 1$ o pierwszym wyrazie $k_1 = a^2$ oraz ilorazie $q = \frac{1}{4}$. Wypisujemy kolejne wyrazy ciągu (k_n) :

$a^2, \frac{1}{4}a^2, \frac{1}{4^2}a^2, \frac{1}{4^3}a^2, \frac{1}{4^4}a^2, \frac{1}{4^5}a^2, \frac{1}{4^6}a^2, \frac{1}{4^7}a^2, \frac{1}{4^8}a^2, \frac{1}{4^9}a^2, \frac{1}{4^{10}}a^2, \frac{1}{4^{11}}a^2$, zatem pole kwadratu K_{12} jest równe $\frac{a^2}{4^{11}}$.

Schemat oceniania obu sposobów

Zdający otrzymuje **1 pkt**

gdy zauważy, że pola kwadratów tworzą ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie $k_1 = a^2$ oraz ilorazie $q = \frac{1}{4}$.

Zdający otrzymuje **2 pkt**

gdy wyznaczy pole kwadratu $K_{12} : \frac{a^2}{4^{11}}$.

Zadanie 30. (0–2)

Modelowanie matematyczne	Zastosowanie wzoru na n -ty wyraz i sumę ciągu arytmetycznego (III.5.c)
--------------------------	---

I sposób rozwiązania

Obliczamy wartości sum częściowych:

$$S_1 = a_1 = 1 - 2 = -1$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = 4 - 4 = 0.$$

Zatem $a_2 = 0 - (-1) = 1$ oraz $r = a_2 - a_1 = 1 - (-1) = 2$.

Korzystamy ze wzoru na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego i otrzymujemy:

$$a_n = a_1 + (n-1)r = -1 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 3$$

Odpowiedź: n -ty wyraz ciągu (a_n) wyraża się wzorem $a_n = 2n - 3$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 pkt

gdy obliczy wartości sum częściowych:

$$S_1 = a_1 = 1 - 2 = -1$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = 4 - 4 = 0$$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje 2 pkt

gdy bezbłędnie wyznaczy n -ty wyraz ciągu (a_n) : $a_n = 2n - 3$.

Uwagi

1. Zdający może od razu zapisać układ $\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_1 + a_2 = 0 \end{cases}$
2. Jeżeli zdający zapisze układ $\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_2 = 0 \end{cases}$, to otrzymuje **0 punktów**.

II sposób rozwiązania

Zauważamy, że dla $n > 1$ mamy $a_n = S_n - S_{n-1}$.

$$S_{n-1} = (n-1)^2 - 2(n-1) = n^2 - 4n + 3$$

Obliczamy $a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 - 2n - (n^2 - 4n + 3) = 2n - 3$ oraz $a_1 = S_1 = -1$.

Zauważamy ponadto, że wzór $a_n = 2n - 3$ dla $n = 1$ daje otrzymaną wartość $a_1 = -1$.

Zatem dla każdego $n \geq 1$ otrzymujemy $a_n = 2n - 3$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 pkt

gdy zapisze, że $a_n = S_n - S_{n-1}$, wyznaczy $S_{n-1} = (n-1)^2 - 2(n-1) = n^2 - 4n + 3$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje 2 pkt

gdy bezbłędnie wyznaczy n -ty wyraz ciągu: $a_n = 2n - 3$.

Uwaga

Przynajemy **2 punkty** nawet wtedy, gdy zdający nie sprawdzi, czy $a_1 = -1$.

III sposób rozwiązania

Zauważamy, że $\frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = n^2 - 2n$ i wyznaczamy $a_n = 2n - 4 - a_1$.

Obliczamy $a_1 = S_1 = -1$. Stąd otrzymujemy $a_n = 2n - 4 + 1$, czyli $a_n = 2n - 3$.

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 pkt

gdy ze wzoru $\frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = n^2 - 2n$ wyznaczy $a_n = 2n - 4 - a_1$ i na tym poprzestanie

lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje 2 pkt

gdy wyznaczy n -ty wyraz ciągu: $a_n = 2n - 3$.

Uwagi

1. Zdający może od razu zapisać, że $a_n = 2n - 4 - a_1$.
2. Jeśli zdający zapisze, że $\frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = n^2 - 2n$, wyznaczy z błędem rachunkowym a_n np.: $a_n = 2n - 2 - a_1$ i z tym błędem doprowadzi rozwiązanie do końca, to otrzymuje **1 punkt**.

Zadanie 28. (0–2)

Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 3, czwarty wyraz tego ciągu jest równy 15. Oblicz sumę sześciu początkowych wyrazów tego ciągu.

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Oblicza sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.
---	---

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje 1 pkt

gdy:

- obliczy różnicę ciągu arytmetycznego ($r = 4$) i na tym poprzestanie lub błędnie wyznaczy S_6

albo

- obliczy lub zapisze poprawnie jeden z pozostałych wyrazów ciągu i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy

albo

- popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu r i konsekwentnie do tego błędu wyznaczy S_6 .

Zdający otrzymuje 2 pkt

gdy obliczy $S_6 = 78$.

Uwaga:

Zdający otrzymuje **0 punktów**, jeżeli:

- błędnie zapisze związek między a_1 , a_4 i r , np. $a_1 + 4r = 15$ i konsekwentnie do tego błędu wyznaczy S_6 ,
- zacytuje odpowiednie wzory, np. $a_4 = a_1 + 3r$ lub $S_6 = \frac{2a_1 + 5r}{2} \cdot 6$ i na tym poprzestanie.

Modelowanie matematyczne	Zastosowanie wzorów na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego lub wykorzystanie własności trzech kolejnych wyrazów tego ciągu
--------------------------	---

I sposób rozwiązania

Liczby x , y , 19 w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny, stąd $2y = x + 19$.

Zapisujemy więc układ równań

$$\begin{cases} 2y = x + 19 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

którego rozwiązaniem jest $x = -1$ i $y = 9$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 pkt

gdy wykorzysta własności ciągu arytmetycznego i zapisze równanie np. $2y = x + 19$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje 2 pkt

gdy obliczy: $x = -1$ i $y = 9$.

Uwaga

Zdający może jako rozwiązanie podać ciąg $(-1, 9, 19)$ i wtedy również otrzymuje **2 punkty**.

II sposób rozwiązania

Liczby x , y , 19 w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny. Niech r będzie różnicą tego ciągu i $x = a_1$, $y = a_2 = a_1 + r$, $19 = a_3 = a_1 + 2r$.

Otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} a_1 + a_1 + r = 8 \\ a_1 + 2r = 19 \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest $a_1 = -1$, $r = 10$. Stąd: $x = a_1 = -1$, $y = a_2 = 9$.

Uwaga

Możemy również otrzymać następujące układy równań:

$$\begin{cases} 2a_1 + r = 8 \\ \frac{a_1 + 19}{2} = a_1 + r \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} y = x + r \\ 19 = x + 2r \\ x + y = 8 \end{cases}$$

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 pkt

gdy wprowadzi oznaczenia $x = a_1$, $y = a_2 = a_1 + r$ i zapisze równanie $a_1 + 2r = 19$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje 2 pkt

gdy obliczy: $x = -1$ i $y = 9$.

III sposób rozwiązania

Wprowadzamy oznaczenia $x = a_1$, $y = a_2$, $19 = a_3$.

Obliczamy:

$$S_3 = x + y + 19 = 8 + 19 = 27.$$

Korzystając ze wzoru na sumę trzech początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, otrzymujemy $\frac{a_1 + 19}{2} \cdot 3 = 27$.

Stąd $a_1 = -1$, zatem $x = -1$, $y = 9$.

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 pkt

gdy wprowadzi oznaczenia $x = a_1$, $y = a_2$, $19 = a_3$ i zapisze równanie $\frac{a_1 + a_3}{2} \cdot 3 = 27$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje 2 pkt

gdy obliczy: $x = -1$ i $y = 9$.

Uwaga

Jeżeli zdający zapisze $x = -1$ i $y = 9$ bez obliczeń i nie uzasadni, że jest to jedyne rozwiązanie, to otrzymuje **1 punkt**.

20

Odpowiedź

B

WskazówkaZastosuj wzór na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego.

21

Odpowiedź

A

WskazówkaWykorzystaj wzór na n -ty wyraz ciągu geometrycznego.

22

Odpowiedź

C

WskazówkaZauważ, że wyraz ciągu będzie liczbą całkowitą, gdy n będzie naturalnym dzielnikiem liczby 24.

23

Odpowiedź

C

WskazówkaWykorzystaj wzór na n -ty wyraz ciągu geometrycznego.

Zadanie 34. (0-5)

W nieskończonym ciągu arytmetycznym (a_n) , określonym dla $n \geq 1$, suma jedenastu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa 187. Średnia arytmetyczna pierwszego, trzeciego i dziewiątego wyrazu tego ciągu, jest równa 12. Wyrazy a_1, a_3, a_9 ciągu (a_n) , w podanej kolejności, tworzą nowy ciąg – trzywyrazowy ciąg geometryczny (b_n) . Oblicz k .

IV. Użycie i tworzenie strategii.	5. Ciągi. Zdający stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (5.3, 5.4).
-----------------------------------	---

Rozwiązanie

Korzystamy ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i zapisujemy równanie:

$$\frac{2a_1 + 10r}{2} \cdot 11 = 187,$$

$$(a_1 + 5r) \cdot 11 = 187,$$

$$a_1 + 5r = 17.$$

Korzystamy z informacji o średniej arytmetycznej trzech wyrazów i zapisujemy równanie:

$$\frac{a_1 + a_1 + 2r + a_1 + 8r}{3} = 12,$$

$$\frac{3a_1 + 10r}{3} = 12,$$

$$a_1 + \frac{10}{3}r = 12.$$

Zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} a_1 + 5r = 17 \\ a_1 + \frac{10}{3}r = 12. \end{cases}$$

Z pierwszego równania otrzymujemy $a_1 = 17 - 5r$.

Otrzymaną wartość a_1 podstawiamy do drugiego równania i otrzymujemy równanie z niewiadomą r :

$$17 - 5r + \frac{10}{3}r = 12,$$

$$r = 3.$$

Obliczamy pierwszy wyraz: $a_1 = 2$.

Uwaga

W rozwiązywaniu układu równań zdający może najpierw wyznaczyć niewiadomą $r = \frac{17}{5} - \frac{1}{5}a_1$.

Otrzymaną wartość r podstawiamy do drugiego równania i otrzymujemy równanie z niewiadomą a_1 :

$$a_1 + \frac{10}{3} \left(\frac{17}{5} - \frac{1}{5}a_1 \right) = 12,$$

$$a_1 + \frac{170}{15} - \frac{10}{15}a_1 = 12,$$

$$\frac{1}{3}a_1 = \frac{2}{3},$$

$$a_1 = 2.$$

Dla $a_1 = 2$ mamy $r = 3$.

Wyznaczamy pozostałe wyrazy tworzące ciąg geometryczny:

$$a_3 = a_1 + 2r = 8, \quad a_9 = a_1 + (k-1)r = 2 + (k-1) \cdot 3.$$

Kolejne wyrazy a_1, a_3, a_9 ciągu geometrycznego spełniają warunek: $a_3^2 = a_1 \cdot a_9$, stąd

$$8^2 = 2 \cdot [2 + (k-1) \cdot 3],$$

$$32 = 3k - 1,$$

$$k = 11.$$

Dla $k = 11$ wyrazy a_1, a_3, a_9 w podanej kolejności tworzą ciąg geometryczny.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postępowanie 1 p.

Zdający wykorzysta

- wzór na sumę n -początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i zapisze równanie z dwiema niewiadomymi a_1 i r , np.: $\frac{2a_1 + 10r}{2} \cdot 11 = 187$ lub $a_1 + 5r = 17$

albo

- średnią arytmetyczną pierwszego, trzeciego oraz dziewiątego wyrazu ciągu (a_n) i zapisze równanie z dwiema niewiadomymi a_1 i r , np.:

$$\frac{a_1 + a_1 + 2r + a_1 + 8r}{3} = 12 \text{ lub } a_1 + \frac{10}{3}r = 12$$

albo

- zależność między pierwszym, trzecim i k -tym wyrazem ciągu (a_n) wynikającą z faktu, że ciąg (a_1, a_3, a_9) jest geometryczny i zapisze np.: $a_3^2 = a_1 \cdot a_9$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

Zdający zapisze układ równań z dwiema niewiadomymi a_1 i r , np.: $\begin{cases} a_1 + 5r = 17 \\ a_1 + \frac{10}{3}r = 12 \end{cases}$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.

Zdający rozwiąże układ równań $a_1 = 2$ i $r = 3$ oraz zapisze zależność między pierwszym, trzecim i k -tym wyrazem ciągu (a_n) wynikającą z faktu, że ciąg (a_1, a_3, a_9) jest geometryczny, np.: $a_3^2 = a_1 \cdot a_9$.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) 4 p.

Zdający

- zapisze równanie z niewiadomą k wynikające z faktu, że ciąg (a_1, a_3, a_9) jest geometryczny oraz a_k jest k -tym wyrazem ciągu arytmetycznego, np.: $8^2 = 2(2 + (k-1) \cdot 3)$

albo

- rozwiąże układ równań z błędem rachunkowym i konsekwentnie do popelnionego błędu obliczy k , o ile otrzymana wartość k jest całkowita dodatnia.

Rozwiązanie pełne 5 p.

Zdający obliczy $k = 11$.

Uwagi

- Jeżeli zdający od razu poda $a_1 = 2$ i $r = 3$ lub wypisze kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego: 2, 5, 8, 11, ..., ale nie uzasadni, że jest to jedyny ciąg spełniający warunki zadania i na tym zakończy, to otrzymuje **1 punkt**.
- Jeżeli zdający od razu poda $a_1 = 2$ i $r = 3$ lub wypisze kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego: 2, 5, 8, 11, ..., ale nie uzasadni, że jest to jedyny ciąg spełniający warunki zadania i wskaże lub obliczy $k = 11$, to otrzymuje **3 punkty**.
- Jeżeli zdający od razu poda $a_1 = 2$ i $r = 3$ lub wypisze kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego: 2, 5, 8, 11, ..., ale nie uzasadni, że jest to jedyny ciąg spełniający warunki zadania i zapisze równanie z niewiadomą k i popelni błąd rachunkowy w trakcie jego rozwiązywania, to otrzymuje **2 punkty**.
- Jeżeli zdający od razu przyjmie ciąg arytmetyczny nie spełniający warunków zadania (suma 11 początkowych jego wyrazów jest różna od 187 lub średnia pierwszego, trzeciego i dziewiątego wyrazu jest różna od 12), to za całe zadanie otrzymuje **0 punktów**.

25

Zadanie 14. (0–1)

III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi. Zdający stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (5.3).	Wersja I	Wersja II
		A	B

26

Zadanie 15. (0–1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	5. Ciągi. Zdający bada, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny (5.2).	Wersja I	Wersja II
		D	C

27

Zadanie 12. (0–1)

III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi. Zdający stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (5.3).	Wersja I	Wersja II
		B	C

28

Zadanie 13. (0–1)

III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi. Zdający stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (5.4).	Wersja I	Wersja II
		A	B

Zadanie 31. (0–2)

III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi. Zdający stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (5.3).
--------------------------------	--

Przykładowe rozwiązanie

Wyznaczamy różnicę r ciągu arytmetycznego.

W tym celu stosujemy wzory na sumę częściową $S_3 = 3a_1 + 3r = 33$ i $a_1 = 8$ lub zapisujemy równanie $a_1 + a_1 + r + a_1 + 2r = 33$.

Obliczamy r : $r = 3$.

Następnie obliczamy różnicę $a_{16} - a_{13}$, jako $3r$ lub po wyznaczeniu a_{16} i a_{13} , czyli

$$a_{16} = 8 + 15 \cdot 3 = 53, \quad a_{13} = 8 + 12 \cdot 3 = 44.$$

Zatem $a_{16} - a_{13} = 3r = 9$.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje 1 p.

gdy obliczy różnicę ciągu $r = 3$ (lub $3r = 9$) lub obliczy wartość $a_1 + r = 11$, lub obliczy wartość $a_2 = 11$, lub zapisze, że $a_{16} - a_{13} = 3r$, lub obliczy $a_3 = 14$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje 2 p.

gdy obliczy różnicę $a_{16} - a_{13} = 9$.

Uwagi

1. Jeśli zdający przyjmuje $n = 33$ lub $a_3 = 33$ i nie przedstawia poprawnej metody obliczenia różnicy $a_{16} - a_{13}$, to otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający poda wartość $r = 3$ i zapisze $a_{16} - a_{13} = 3r = 9$, to otrzymuje **1 punkt**.
3. Jeżeli zdający zamiast ciągu arytmetycznego rozważa ciąg geometryczny, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

III. Modelowanie matematyczne.

5. Ciągi. Zdający stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (5.3).**Przykładowe rozwiązania**I sposóbKorzystamy ze wzoru na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego i zapisujemy wzór na a_{12} :

$$a_{12} = a_1 + (12-1) \cdot r.$$

Korzystamy ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i zapisujemy wzór na S_{12} :

$$S_{12} = \frac{2a_1 + (12-1) \cdot r}{2} \cdot 12.$$

Otrzymujemy układ równań

$$30 = a_1 + 11r \text{ i } 162 = 12a_1 + 66r.$$

Stąd otrzymujemy

$$a_1 = -3.$$

II sposóbKorzystamy ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i zapisujemy wzór na S_{12} :

$$S_{12} = \frac{a_1 + a_{12}}{2} \cdot 12.$$

Otrzymujemy równanie

$$162 = \frac{a_1 + 30}{2} \cdot 12.$$

Stąd otrzymujemy

$$a_1 = -3.$$

Schemat punktowania**Zdający otrzymuje 1 p.**
gdy:

- zapisze dwa równania z niewiadomymi a_1 i r wynikające z zastosowania poprawnych wzorów na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego i sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego:

$$\text{np.: } 30 = a_1 + 11r \text{ i } 162 = \frac{2a_1 + 11 \cdot r}{2} \cdot 12$$

albo

- zapisze równanie z jedną niewiadomą a_1 wynikające z zastosowania poprawnego wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego bez wykorzystywania różnicy ciągu:

$$\text{np.: } 162 = \frac{a_1 + 30}{2} \cdot 12$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje 2 p.
gdy zapisze równanie z jedną niewiadomą a_1 i obliczy pierwszy wyraz ciągu: $a_1 = -3$.**Uwagi**

1. Jeżeli zdający, stosując metodę prób i błędów, zapisze poprawny ciąg poprzez wypisanie 12 początkowych kolejnych wyrazów i ustali, że $a_1 = -3$, to otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający, stosując metodę prób i błędów, wypisze co najmniej trzy kolejne wyrazy i ustali, że $a_1 = -3$, ale nie zapisze wszystkich 12 początkowych wyrazów ciągu, to otrzymuje **1 punkt**.
3. Jeżeli zdający zapisze tylko $a_1 = -3$ lub $a_1 = -3$ i $r = 3$, to otrzymuje **0 punktów**.

31 Zadanie 11. (0–1)

III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi. Zdający bada, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny (5.2).	Wersja I	Wersja II
		A	B

32 Zadanie 12. (0–1)

III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi. Zdający stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (5.3).	Wersja I	Wersja II
		A	C

33 Zadanie 11. (0–1)

III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi. Zdający stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (5.3).	Wersja I	Wersja II
		A	B

34 Zadanie 13. (0–1)

III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi. Zdający stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (5.4).	Wersja I	Wersja II
		B	A

35 Zadanie 12. (0–1)

III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi. Zdający stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (5.4).	Wersja I	Wersja II
		A	C

III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi. Zdający stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (5.3).
--------------------------------	--

Schemat punktowania

Rozwiązanie pełne 4 p.
Zdający obliczy k : $k = 27$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.
Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą k , które wynika ze wzoru na k -ty wyraz ciągu arytmetycznego: $26 + (k-1) \cdot (-4) = -78$
i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.
Zdający obliczy pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego: $a_1 = 26$ i na tym zakończy lub w dalszej części rozwiązania stosuje niepoprawny wzór na wyraz a_k .

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 p.
Zdający

- zapisze równanie $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6}{6} = 16$

albo

- wykorzysta wzór na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego i zapisze wszystkie wyrazy: a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 , w zależności od a_1 i r np.: $a_2 = a_1 + r$, $a_3 = a_1 + 2r$, $a_4 = a_1 + 3r$, $a_5 = a_1 + 4r$, $a_6 = a_1 + 5r$,

albo

- zapisze, że $S_6 = 6 \cdot 16$,

albo

- zastosuje wzór na sumę sześciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i wyznaczy S_6 w zależności od a_1 i r : $S_6 = \frac{2a_1 + 5r}{2} \cdot 6$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Uwagi

- Jeżeli zdający realizuje strategię rozwiązania i popełnia jedynie błędy rachunkowe, to może otrzymać 3 punkty, o ile popełnione błędy nie ułatwiają rozważanego zagadnienia na żadnym etapie rozwiązania, a uzyskana liczba k jest całkowita dodatnia.
- Jeżeli zdający popełnia błąd w interpretacji średniej arytmetycznej i poprawnie stosuje wzór na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego, to może otrzymać co najwyżej 2 punkty za całe rozwiązanie.
- Jeżeli zdający popełnia błąd w interpretacji średniej arytmetycznej i poprawnie stosuje wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, to może otrzymać co najwyżej 2 punkty za całe rozwiązanie.
- Jeżeli zdający poprawnie interpretuje średnią arytmetyczną i popełnia błąd we wzorze na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego, to może otrzymać co najwyżej 2 punkty za całe rozwiązanie.
- Jeżeli zdający poprawnie interpretuje średnią arytmetyczną i popełnia błąd we wzorze na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, to może otrzymać co najwyżej 2 punkty za całe rozwiązanie.
- Jeżeli zdający popełnia błąd w interpretacji średniej arytmetycznej i popełnia błąd we wzorze na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, to może otrzymać co najwyżej 1 punkt za całe rozwiązanie.
- Jeżeli zdający poprawnie obliczy $a_1 = 26$, a następnie zapisze $k = 27$, to otrzymuje 4 punkty.
- Jeżeli zdający stosuje metodę prób i błędów, sprawdzając, czy otrzymany ciąg spełnia warunki zadania (suma sześciu początkowych wyrazów jest równa 96 lub ich średnia arytmetyczna jest równa 16) i zapisze poprawny ciąg: 26, 22, 18, 14, 10, 6 oraz zapisze $a_1 = 26$ i $k = 27$, to otrzymuje 4 punkty.
- Jeżeli zdający stosuje metodę prób i błędów, sprawdzając, czy otrzymany ciąg spełnia warunki zadania (suma sześciu początkowych wyrazów jest równa 96 lub ich średnia arytmetyczna jest równa 16) i zapisze poprawny ciąg: 26, 22, 18, 14, 10, 6 oraz zapisze $a_1 = 26$ albo $k = 27$, to otrzymuje 2 punkty.
- Jeżeli zdający od razu zapisze poprawny ciąg: 26, 22, 18, 14, 10, 6 oraz zapisze $k = 27$, ale z zapisów zdającego nie można wywnioskować, że dokonuje sprawdzenia, czy podany ciąg spełnia warunki zadania, to otrzymuje 1 punkt.
- Jeżeli zdający jedynie zapisze $a_1 = 26$ i $k = 27$, to otrzymuje 0 punktów.
- Jeżeli zdający poprawnie obliczy a_1 , a w drugiej części rozwiązania zapisze równanie z niewiadomą k i popełni jeden błąd polegający na wpisaniu: zamiast liczby -78 liczby 78 albo zamiast liczby -4 liczby 4, albo zamiast liczby 26 liczby -26 , to może otrzymać 1 punkt za drugi etap.
- Jeżeli zdający nie zapisuje, że korzysta z sumy sześciu początkowych wyrazów ciągu, a rozpoczyna rozwiązanie od zapisania zależności $\frac{a_3 + a_4}{2} = 16$ bez stosownych objaśnień, to może otrzymać co najwyżej 3 punkty.

Przykładowe rozwiązanie

Z treści zadania otrzymujemy

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 &= 16, \\ \frac{a_1 + a_1 + (-4) + a_1 + 2 \cdot (-4) + a_1 + 3 \cdot (-4) + a_1 + 4 \cdot (-4) + a_1 + 5 \cdot (-4)}{6} &= 16, \\ \frac{6a_1 - 60}{6} &= 16, \\ a_1 &= 26. \end{aligned}$$

W celu obliczenia liczby k stosujemy wzór na wyraz a_k i otrzymujemy:

$$26 + (k-1) \cdot (-4) = -78, \text{ a stąd } k = 27.$$

Odpowiedź: $a_1 = 26$, $k = 27$.

Ciągi

ZAKRES PODSTAWOWY

numeracja
zadań w
teście

1

Zadanie 21. (0–1)

W dziewięciowyrazowym ciągu geometrycznym o wyrazach dodatnich pierwszy wyraz jest równy 3, a ostatni wyraz jest równy 12. Piąty wyraz tego ciągu jest równy

A. $3\sqrt[4]{2}$

B. 6

C. $7\frac{1}{2}$

D. $8\frac{1}{7}$

2

Zadanie 22. (0–1)

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = (n+3)(n-5)$ dla $n \geq 1$. Liczba ujemnych wyrazów tego ciągu jest równa

A. 3

B. 4

C. 7

D. 9

3

Zadanie 11. (1 pkt)

Liczby 2, -1, -4 są trzema początkowymi wyrazami ciągu arytmetycznego (a_n) , określonego dla liczb naturalnych $n \geq 1$. Wzór ogólny tego ciągu ma postać

A. $a_n = -3n + 5$

B. $a_n = n - 3$

C. $a_n = -n + 3$

D. $a_n = 3n - 5$

4

Zadanie 13. (1 pkt)

Liczby: $x-2$, 6, 12, w podanej kolejności, są trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Liczba x jest równa

A. 0

B. 2

C. 3

D. 5

5

Zadanie 12. (1 pkt)

Ciąg $(27, 18, x+5)$ jest geometryczny. Wtedy

A. $x = 4$

B. $x = 5$

C. $x = 7$

D. $x = 9$

6

Zadanie 13. (1 pkt)

Ciąg (a_n) określony dla $n \geq 1$ jest arytmetyczny oraz $a_3 = 10$ i $a_4 = 14$. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy

A. $a_1 = -2$

B. $a_1 = 2$

C. $a_1 = 6$

D. $a_1 = 12$

7

Zadanie 17. (1 pkt)

Miary kątów czworokąta tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 20° . Najmniejszy kąt tego czworokąta ma miarę

A. 40°

B. 50°

C. 60°

D. 70°

8

Zadanie 18. (1 pkt)

Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = (-1)^n \cdot \frac{2-n}{n^2}$ dla $n \geq 1$. Wówczas wyraz a_5 tego ciągu jest równy

A. $-\frac{3}{25}$

B. $\frac{3}{25}$

C. $-\frac{7}{25}$

D. $\frac{7}{25}$

9

Zadanie 32. (4 pkt)

Ciąg $(9, x, 19)$ jest arytmetyczny, a ciąg $(x, 42, y, z)$ jest geometryczny. Oblicz x, y oraz z .

10

Zadanie 14. (1 pkt)

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = \sqrt{2n+4}$ dla $n \geq 1$. Wówczas

- A. $a_8 = 2\sqrt{5}$ B. $a_8 = 8$ C. $a_8 = 5\sqrt{2}$ D. $a_8 = \sqrt{12}$

11

Zadanie 15. (1 pkt)

Ciąg $(2\sqrt{2}, 4, a)$ jest geometryczny. Wówczas

- A. $a = 8\sqrt{2}$ B. $a = 4\sqrt{2}$ C. $a = 8 - 2\sqrt{2}$ D. $a = 8 + 2\sqrt{2}$

12

Zadanie 11. (1 pkt)

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n) , w którym $a_3 = 1$ i $a_4 = \frac{2}{3}$. Wtedy

- A. $a_1 = \frac{2}{3}$ B. $a_1 = \frac{4}{9}$ C. $a_1 = \frac{3}{2}$ D. $a_1 = \frac{9}{4}$

13

Zadanie 12. (1 pkt)

Dany jest nieskończony rosnący ciąg arytmetyczny (a_n) o wyrazach dodatnich. Wtedy

- A. $a_4 + a_7 = a_{10}$ B. $a_4 + a_6 = a_3 + a_8$ C. $a_2 + a_9 = a_3 + a_8$ D. $a_5 + a_7 = 2a_8$

14

Zadanie 11. (1 pkt)

W ciągu arytmetycznym (a_n) dane są: $a_3 = 13$ i $a_5 = 39$. Wtedy wyraz a_1 jest równy

- A. 13 B. 0 C. -13 D. -26

15

Zadanie 12. (1 pkt)

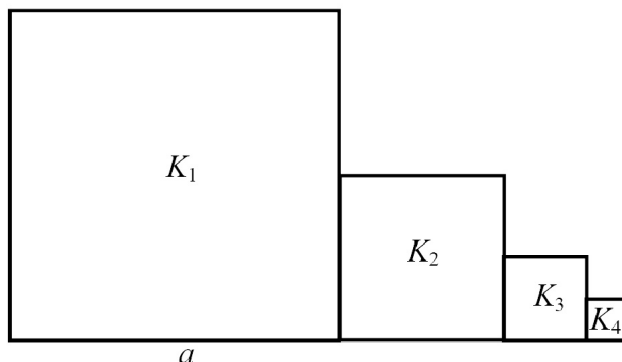
W ciągu geometrycznym (a_n) dane są: $a_1 = 3$ i $a_4 = 24$. Iloraz tego ciągu jest równy

- A. 8 B. 2 C. $\frac{1}{8}$ D. $-\frac{1}{2}$

16

Zadanie 26. (0–2)

Kwadrat K_1 ma bok długości a . Obok niego rysujemy kolejno kwadraty $K_2, K_3, K_4, \dots$ takie, że kolejny kwadrat ma bok o połowę mniejszy od boku poprzedniego kwadratu (zobacz rysunek).



Wyznacz pole kwadratu K_{12} .

17

Zadanie 30. (2 pkt)

Suma $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ początkowych n wyrazów pewnego ciągu arytmetycznego (a_n) jest określona wzorem $S_n = n^2 - 2n$ dla $n \geq 1$. Wyznacz wzór na n -ty wyraz tego ciągu.

18

Zadanie 28. (2 pkt)

Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 3, czwarty wyraz tego ciągu jest równy 15. Oblicz sumę sześciu początkowych wyrazów tego ciągu.

19

Zadanie 27. (2 pkt)

Liczby $x, y, 19$ w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny, przy czym $x + y = 8$. Oblicz x i y .

20

Zadanie 16. (0–1)

Na ścianie kamienicy zaprojektowano mural utworzony z szeregu trójkątów równobocznych różnej wielkości. Najmniejszy trójkąt ma bok długości 1 m, a bok każdego z następnych trójkątów jest o 10 cm dłuższy niż bok poprzedzającego go trójkąta. Ostatni trójkąt ma bok długości 5,9 m. Ile trójkątów przedstawia mural?

- A. 49 B. 50 C. 59 D. 60

21

Zadanie 21. (0–1)

Dany jest ciąg geometryczny (a_n) , w którym $a_1 = -\sqrt{2}$, $a_2 = 2$, $a_3 = -2\sqrt{2}$. Dziesiąty wyraz tego ciągu, czyli a_{10} , jest równy

- A. 32 B. -32 C. $16\sqrt{2}$ D. $-16\sqrt{2}$

22

Zadanie 22. (0–1)

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = \frac{24 - 4n}{n}$ dla $n \geq 1$. Liczba wszystkich całkowitych nieujemnych wyrazów tego ciągu jest równa

- A. 7 B. 6 C. 5 D. 4

23

Zadanie 13. (0–1)

W rosnącym ciągu geometrycznym (a_n) , określonym dla $n \geq 1$, spełniony jest warunek $a_4 = 3a_1$. Iloraz q tego ciągu jest równy

- A. $q = \frac{1}{3}$ B. $q = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ C. $q = \sqrt[3]{3}$ D. $q = 3$

24

Zadanie 34. (0–5)

W nieskończonym ciągu arytmetycznym (a_n) , określonym dla $n \geq 1$, suma jedenastu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa 187. Średnia arytmetyczna pierwszego, trzeciego i dziewiątego wyrazu tego ciągu, jest równa 12. Wyrazy a_1, a_3, a_k ciągu (a_n) , w podanej kolejności, tworzą nowy ciąg – trzywyrazowy ciąg geometryczny (b_n) . Oblicz k .

Zadanie 14. (0–1)

Czternasty wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 8, a różnica tego ciągu jest równa $\left(-\frac{3}{2}\right)$.

Siódmy wyraz tego ciągu jest równy

A. $\frac{37}{2}$

B. $-\frac{37}{2}$

C. $-\frac{5}{2}$

D. $\frac{5}{2}$

26

Zadanie 15. (0–1)

Ciąg $(x, 2x+3, 4x+3)$ jest geometryczny. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy

- A. -4 B. 1 C. 0 D. -1

27

Zadanie 12. (0–1)

W ciągu arytmetycznym (a_n) , określonym dla $n \geq 1$, dane są: $a_1 = 5$, $a_2 = 11$. Wtedy

- A. $a_{14} = 71$ B. $a_{12} = 71$ C. $a_{11} = 71$ D. $a_{10} = 71$

28

Zadanie 13. (0–1)

Dany jest trzywyrazowy ciąg geometryczny $(24, 6, a-1)$. Stąd wynika, że

- A. $a = \frac{5}{2}$ B. $a = \frac{2}{5}$ C. $a = \frac{3}{2}$ D. $a = \frac{2}{3}$

29

Zadanie 31. (0–2)

W ciągu arytmetycznym (a_n) , określonym dla $n \geq 1$, dane są: wyraz $a_1 = 8$ i suma trzech początkowych wyrazów tego ciągu $S_3 = 33$. Oblicz różnicę $a_{16} - a_{13}$.

30

Zadanie 31. (0–2)

Dwunasty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) , określonego dla $n \geq 1$, jest równy 30, a suma jego dwunastu początkowych wyrazów jest równa 162. Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu.

31

Zadanie 11. (0–1)

Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = \frac{5-2n}{6}$ dla $n \geq 1$. Ciąg ten jest

- A. arytmetyczny i jego różnica jest równa $r = -\frac{1}{3}$.
 B. arytmetyczny i jego różnica jest równa $r = -2$.
 C. geometryczny i jego iloraz jest równy $q = -\frac{1}{3}$.
 D. geometryczny i jego iloraz jest równy $q = \frac{5}{6}$.

32

Zadanie 12. (0–1)

Dla ciągu arytmetycznego (a_n) , określonego dla $n \geq 1$, jest spełniony warunek $a_4 + a_5 + a_6 = 12$. Wtedy

- A. $a_5 = 4$ B. $a_5 = 3$ C. $a_5 = 6$ D. $a_5 = 5$

Zadanie 11. (0–1)

W ciągu arytmetycznym (a_n) , określonym dla $n \geq 1$, dane są dwa wyrazy: $a_1 = 7$ i $a_8 = -49$.
Suma ośmiu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa

- A. -168 B. -189 C. -21 D. -42

Zadanie 13. (0–1)

Dany jest ciąg geometryczny (a_n) , określony dla $n \geq 1$, w którym $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = 2\sqrt{2}$, $a_3 = 4\sqrt{2}$. Wzór na n -ty wyraz tego ciągu ma postać

A. $a_n = (\sqrt{2})^n$

B. $a_n = \frac{2^n}{\sqrt{2}}$

C. $a_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$

D. $a_n = \frac{(\sqrt{2})^n}{2}$

Zadanie 12. (0–1)

Dany jest ciąg geometryczny (a_n) , określony dla $n \geq 1$. Wszystkie wyrazy tego ciągu są dodatnie i spełniony jest warunek $\frac{a_5}{a_3} = \frac{1}{9}$. Iloraz tego ciągu jest równy

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{1}{\sqrt{3}}$

C. 3

D. $\sqrt{3}$

Zadanie 32. (0–4)

Ciąg arytmetyczny (a_n) jest określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Różnicą tego ciągu jest liczba $r = -4$, a średnia arytmetyczna początkowych sześciu wyrazów tego ciągu: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$, jest równa 16.

a) Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu.

b) Oblicz liczbę k , dla której $a_k = -78$.

Dotyczy materiałów książkowych dotyczących ciągów dla klasy 3D.

Bardzo proszę zapoznać się ze wstępem oraz z przykładami zanim przystąpicie do rozwiązywania zadań, ponieważ w przykładach prezentowane są przykładowe sposoby rozwiązań poszczególnych typów zadań.